## I التفاضل

### Basic Differentiation Rules

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$

2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$

3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$

4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$

6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$

7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$

8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$

9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$

10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$

11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$

12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$

13. $\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)u'$

14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)u'$

15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$

16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$

17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$

18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$

19. $\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1 + u^2}$

22. $\frac{d}{dx}[\text{arccot } u] = \frac{-u'}{1 + u^2}$

23. $\frac{d}{dx}[\text{arcsec } u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

24. $\frac{d}{dx}[\text{arccsc } u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

25. $\frac{d}{dx}[\sinh u] = (\cosh u)u'$

26. $\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\sinh u)u'$

27. $\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\text{sech}^2 u)u'$

**28.** $\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$

**29.** $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u'$

**30.** $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u'$

**31.** $\frac{d}{dx}[\sinh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

**32.** $\frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

**33.** $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$

**34.** $\frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$

**35.** $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

**36.** $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$

*******************************************************************************************************************************

## II التكامل

## Basic Integration Formulas

**1.** $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$

**2.** $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$

**3.** $\int du = u + C$

**4.** $\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$

**5.** $\int e^u\,du = e^u + C$

**6.** $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

**7.** $\int \cos u\,du = \sin u + C$

**8.** $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

**9.** $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

**10.** $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

11. $\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$

12. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

13. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

14. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

15. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

************************************************************************************************************************

## الدالة الاسية وتفاضلها

$$(2)\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x} \qquad (3)\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax}$$

$$(4)\frac{d}{dx}\left(e^{-ax}\right) = -ae^{-ax}$$

## الدالة اللوغاريتمية وتفاضلها

إذا كان $a$ عدد موجب لا يساوي الواحد الصحيح وكانت $c = a^b$ فأن:

$$\log_a c = b \qquad (1)$$

أي أنه إذا كانت $c=a^b$ فإننا نقول إن لوغاريتم $c$ مثلاً للأساس $a$ هو $b$ فإذا كانت $x=e^y$ فيمكننا كتابة أن:

$$\log_e x = y$$

وأخذنا $c=x,a=e,b=y$ في (1).أي أن لوغاريتم $x$ للأساس $e$ هو $y$ حيث $(\log_e = \ln)$.

أي أن الدالة $y=\psi(x)=\log_e x$ هي الدالة العكسية للدالة $y=\varphi(y)=e^y$ وكذا الدالة $e^y$ هي الدالة العكسية للدالة $\log_e x$ (يكتب في الغالب $\ln x$ للدلالة علي $\log_e x$).

**ملحوظة:**

نلاحظ أن إذا كان الأساس هو العدد 10 فيكون لوغاريتم العدد $x$ لهذا الأساس هو $\log_{10} x$ وأحياناً يفضل كتابة الأساس في هذه الحالة ويكتب $\log x$ وبالتالي فإن الدالة العكسية لدالة $y=\log_{10} x$ هي $x=10^y$.

**العلاقة بين $\ln x, \log x$:**

لأي عددين $a,b$ نجد أن:

$$\log_a x = \log_b x.\log_a b$$

إذن
$$\log_{10} x = \log_e x.\log_{10} e \qquad (*)$$

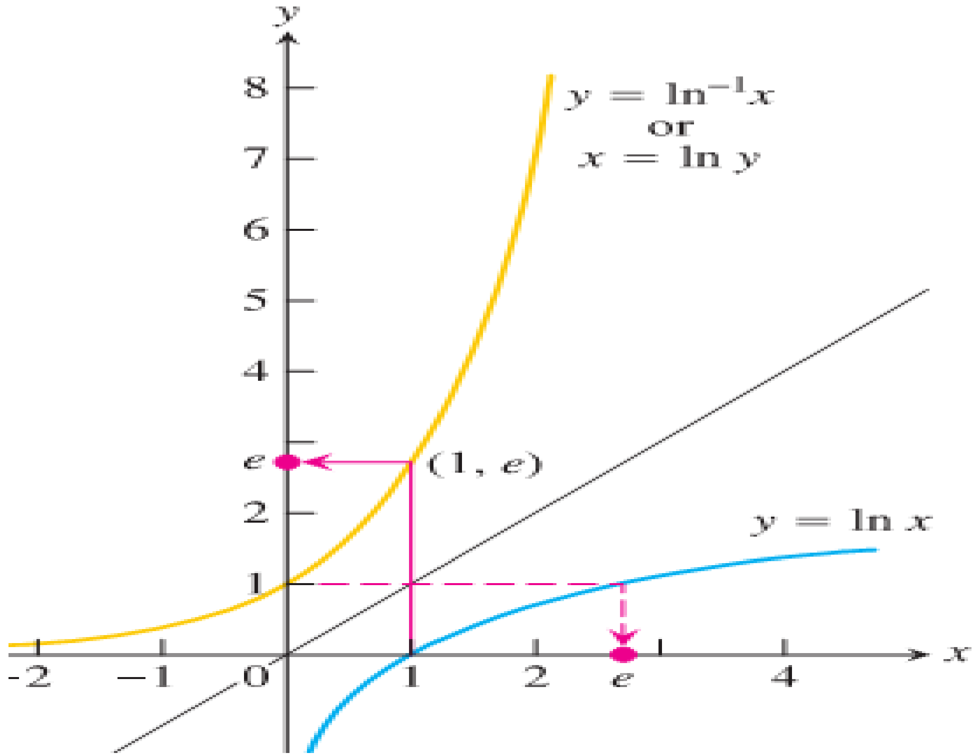
كذلك
$$\log_e x = \log_{10} x.\log_e 10 \qquad (**)$$

ويمكن حساب $\log_{10} e, \log_e 10$ فيكون:

$$\log_e 10 = 2.303, \quad \log_{10} e = 0.4343$$

إذن مما سبق من العلاقتين $(**),(*)$ نستنتج أن

$$\log x = 0.4343 \ln x$$
$$\ln x = 2.303 \log x$$



لما كانت الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية، فإنه برسم منحنيات الدالة نلاحظ من قاعدة تماثل الدوال العكسية حول المستقيم $y = x$ :

(1) يتزايد منحني الدالة اللوغاريتمية بصفة مستمرة بتزايد $x$ لجميع قيم $x$ الموجبة.

(2) $\log_a x$ غير معروف لقيم $x$ السالبة، لأي أساس $a$.

(3) إذا كانت $0 \le x \le 1$ فأن $\log_a x$ دائماً سالبة، وأما إذا كانت $x \ge 1$ فإن $\log_a x \ge 0$.

(4) ولدينا القواعد الأساسية الآتية:

$$(i)\ \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$(ii)\ \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$(iii)\ \ln_e = 1\ ,\ \log 1 = 0$$

$$(iv)\log\left(x^a\right) = a\log x$$

$$(v)\log(0) = -\infty \quad , \quad e^{-\infty} = 0$$

## تفاضل الدالة اللوغاريتمية

نعلم أن $y=\ln x \Leftrightarrow x=e^{x}$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}=e^{y}=x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{x}$$

## نظرية:

إذا كانت $f\left(x\right)=\ln x$ فإن $\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right]=\frac{1}{x}$

## تفاضل الدالة الأسية العامة

$e^{x}$ حالة خاصة من الحالة العامة $a^{x}$ حيث $a$ هو اى عدد موجب بينما $e$ هو عدد محدد نعلم قيمته.

اذا كانت $y=a^{x}$ فان $\ln y=x\ln a$

$$x=\frac{\ln y}{\ln a} \quad \therefore \frac{dx}{dy}=\left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{1}{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=y\ln a=a^{x}\ln a$$

**نظرية**

اذا كانت $f(x)=a^x$ فان $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=a^x.\log a$

**مثال (1):**

اذا كانت $y=10^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=10^x\log_e 10$$

**ملحوظة:**

عند حساب $\log x$ نكتبها بدلالة $\ln x$.

**مثال(2):**

اذا كانت $y=e^{-2x}\sin(3x+1)$ فان

$$\frac{dy}{dx}=e^{-2x}\frac{d}{dx}\sin(3x+1)+\sin(3x+1)\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^{-2x}3\cos(3x+1)+\sin(3x+1)\left(-2e^{-2x}\right)$$

$$=e^{-2x}\left[3\cos(3x+1)-2\sin(3x+1)\right]$$

*************************************************************************************************

## بعض الاساسيات المهمة

(1) مجموع المتوالية الهندسية ذات الحد الاول **a** والاساس **r** وعدد الحدود **n** هو:

$$\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = a\left[\frac{1-r^n}{1-r}\right]$$

(2) مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية ذات الحد الاول **a** والاساس **r** هو:

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1$$

(3) مفكوك ذات الحدين

(a) بأس صحيح موجب

$$(a+b)^n = b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + \ldots + a^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

حيث تسمى $\binom{n}{i}$، $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ معاملات ذات الحدين وهى توافيق $i$ من $n$ وتعريفها هو:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{i!} = \frac{(n)_i}{i!}$$

حيث تسمى $(n)_i$ تباديل $i$ من $n$ وتعريفها هو $(n)_i = n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)$

وتسمى $n!$ مضروب $n$ وتعريفها هو $n! = \mathrm{n}(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$

ومن خصائص معاملات ذات الحدين $\binom{n}{i}$ أن

$$(\mathrm{i})\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$(\mathrm{ii})\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i},$$

$$(\mathrm{iii})\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

بافتراض ان $\mathrm{i} > \mathrm{n}$ او $\binom{n}{i} = 0, i < 0$

وهناك حالات خاصة لمفكوك ذات الحدين باس صحيح موجب كما يلى:

$$(i)\ (1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{i}x^i+\dots+x^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i,$$

$$(ii)\ (1-x)^n = 1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\dots+(-1)^i\binom{n}{i}x^i+\dots+(-1)^n x^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^i,$$

$$(iii)\ 2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{i}+\dots+\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i},\ \left(\text{put } x=1 \text{ in } (i)\right)$$

$$(iv)\ 0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\dots+(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\quad \left(\text{put } x=1 \text{ in } (ii)\right)$$

وبفك طرفى المتطابقة $(1+x)^a(1+x)^b=(1+x)^{a+b}$ وبمساواة معاملى $x^n$ فى الطرفين فاننا نحصل على:

$$(v)\ \sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}=\binom{a}{0}\binom{b}{n}+\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}+\dots+\binom{a}{n}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{n}$$

لاى عددين حقيقين $a,b$.

ويمكن تعميم كلا من التباديل $(n)_i$ والتوافيق $\binom{n}{i}$ من كون $n$ عدد صحيح موجب الى كونها اى عدد حقيقى $\alpha$ حيث نكتب:

$$(\alpha)_i=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-i+1),\ \binom{\alpha}{i}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-i+1)}{i\,!}$$

ونعتبر أن $\binom{\alpha}{0}=1$ . وهذا يمكننا من كتابة مفكوك ذات الحدين باس غير صحيح موجب

(b) مفكوك ذات الحدين باس غير صحيح موجب

$$(1+x)^{\alpha}=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{i}x^i+\dots=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i,\ |x|<1$$

والشرط $|x|<1$ هنا ضرورى لكى تتقارب المتسلسلة التى على اليمين الى $(1+x)^{\alpha}$.

ومن الحالات الخاصة لهذا المفكوك:

$$(i)\ (1+x)^{-1}=1-x+x^2-\dots+(-1)^i x^i+\dots=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i,\quad |x|<1$$

والمتسلسلة الهندسية اللانهائية:

$$(ii)\ (1-x)^{-1}=1+x+x^2+\dots+x^i+\dots=\sum_{i=0}^{\infty}x^i,\quad |x|<1$$

والمتسلسلة:

$$(iii)\ (1-x)^{-2}=1+2x+3x^{2}+\ldots+(i+1)x^{i}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^{i},\quad |x|<1$$

وعموما، المتسلسلة:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n}&=1-\binom{-n}{1}x+\binom{-n}{2}x^{2}+\ldots+(-1)^{i}\binom{-n}{i}x^{i}+\ldots\\&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{-n}{i}x^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n+i-1}{i}x^{i},\ |x|<1\end{aligned}$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned}\binom{-n}{i}&=\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-i+1)}{i\,!}=(-1)^{i}\frac{(n+i-1)(n+i-2)\ldots(n+1)n}{i\,!}\\&=(-1)^{i}\binom{n+i-1}{i}\end{aligned}$$

## حقائق رياضية

$$(1)\ (i)\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^2=\prod_{k=1}^{n} a_k^2 \quad \forall n$$

$$(ii)\ (2n)!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)2^n\, n!\ \forall n$$

$$(2)\ (i)\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dx\,dy$$

$$(ii)\ \iint_D f\,dx\,dy=\iint_{D'} f\,|J|du\,dv\ :x,y\to u,v\ ,D\to D'$$

حيث $J$ تسمى الجاكوبيان وقيمته تتعين بالمحدد

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$(iii)\ \int_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx=2\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

$$(iv)\ \int_0^{2\pi} f(\cos x)\,dx=2\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

$$(3)\quad (i)\left(\sum_n a_n\right)^2=\sum_n a_n\sum_m a_m=\sum_n\sum_m a_n a_m$$

$$(ii)\ I=\sum_n p_n(x)t^n \Rightarrow I^2=\left[\sum_n p_n(x)t^n\right]^2=\sum_n\sum_m p_n(x)p_m(x)t^{n+m}$$

$$(4)\quad (i)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}=e^{ab}\ ,\ e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ ,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}$$

$$(ii)\ \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

هذا التكامل يُعرف دالة جاما والتي نرمز لها بالرمز $\Gamma(x)$

$$(5)\quad (i)\ (1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots+x^n$$

$$(ii)\ (1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots$$

$$(iii)\ (1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

$$(6)\,(i)\; e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k}}{k!}$$

$$(ii)\;\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$(iii)\;\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(iv)\;\sinh x=\frac{x}{1!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(7)\ \ (i)\ \sin^{-1}x=\frac{x}{1!}+\frac{1^2x^3}{3!}+\frac{1^23^2x^5}{5!}+\frac{3^25^2x^7}{7!}\cdots\cdots$$

$$(ii)\ \tan^{-1}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

$$(iii)\ \tanh^{-1}x=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

$$(8)\ \ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots$$

$$(9)\ \ \tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\cdots$$

$$(10)\ \ \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

*************************************

**بالتوفيق للجميع**

**على الهلالى**